Jörgen Smit

Ein Beitrag zum Rechenunterricht

Zugleich Buchbesprechung des Buches: R. Saurer und E. Bühler: "Das Rechnen mit reinen Zahlen." Bern, 1943. Troxler- Verlag.

Nr. 1 der Schriftenreihe der Freien Pädagogischen Vereinigung ist erschienen als ein Beitrag zum Rechenunterricht in der Volksschule. – Die Verfasser versuchen die Probleme möglichst zentral aus lebensnaher Menschenerkenntnis zu erfassen. Einer solchen Erkenntnistätigkeit zeigt sich die Tendenz des heutigen Rechenunterrichts als Irrweg, wo man das Kind möglichst viel in der Richtung dressiert, dass der Satz des Comenius wahr wird: "Nichts ist im Intellekt, was nicht in den Sinnen gewesen ist."

Das Rechnen ist ein Gebiet, wo man am leichtesten die selbständige, aktive, freie Ich-Tätigkeit gewahr werden, üben, sich entfalten lassen könnte. Hier ist ein Reich, wo man mit seinem Willen im Denken ganz dabei sein kann. Mit großer Wucht stellen die Verfasser diese Tatsache dar, sowohl in den mehr erkenntnistheoretisch-methodischen Teilen des Buches als durch die Fülle der praktischen Zahl-Beispiele aus dem Rechenunterricht. Vielleicht ist das Zahlenreich auch das einzige Gebiet für viele Menschen der Gegenwart, wo sie imstande sind, diese Ichtätigkeit bewusst zu entfalten. Doch darf man nicht behaupten, dies sei für immer das einzig-mögliche. Von diesem Zentrum aus, von der mathematischen Tätigkeit aus, kann das ganze Denken nach und nach umgestaltet, willensdurchdrungen werden. Die Begriffe sind dann nicht mehr bloße Abstraktion der Sinneswahrnehmungen. Sie erscheinen jetzt als Elemente einer lebendig-organischen Tätigkeit. Das Denken wird eine freie Ich-Tat, ein Tun, ein Verhalten, ebenso willensdurchdrungen wie der Hammerschlag des Schmiedes, aber in heller Bewusstheit.

Diese Tatsache ist in diesem Buche nicht berücksichtigt, wegen der Wucht, womit der Zählprozess allein hervorgehoben wird. R. Saurer sagt (S. 12/13) :

1. Die Sinnesvorstellungen sind um so getreuer, je reicher und inhaltsvoller sie die Erscheinung des physischen Objektes nachbilden. Mit ihnen verbindet sich der Begriff, der das Wesentliche des Objektes ausspricht. Füge ich beides zusammen, so habe ich mir vom bestimmten Objekt eine ausreichende Erkenntnis verschafft. Vorstellungen und Begriff (dieser im generellen Sinne) sind aber *notwendig bezogen auf dieses Objekt*.

Die Zahl vermittelt weder augenfällige Qualitäten noch Wesentliches von einem Objekt. Sie ist inhaltslos und steht *in keinem Zusammenhang mit dem Objekt*, außer wenn ich das Objekt mit dieser Zahl benenne. Ich kann sofort ein anderes Objekt mit der gleichen Zahl benennen, indem ich anderswo zu zählen beginne.

2. Die Außenwelt bietet mir den Inhalt meiner Vorstellungen. Diese sind erst dann getreu, wenn sich die Außenwelt unverfälscht durch die Tore der Sinne in das Bewusstsein erstrecken kann. Von mir hängt es nicht ab, ob ich rot, hellrot oder dunkelrot wahrnehme. *Die Außenwelt ist es, die meine Sinne anspricht*.

Umgekehrt ist die Richtung heim Zählen: *da spreche ich die Außenwelt an*. Ich kann den Zählprozess einsetzen, wo ich will. Nichts schreibt mir hier die Außenwelt vor.

3. Vom Augenblick des Erwachens bis zum Einschlafen hat der Mensch fortwährend Wahrnehmungen mannigfachster Art. Die Außenwelt fragt nicht, ob der Mensch wahrnehmen wolle. Er hat Eindrücke, denen er nicht rief. Sie drängen sich auf in wahlloser Folge. Der Mensch *muss* sehen. hören, spüren solange er wach ist. Hier ist Zwang.

Den Zählprozess zwingt ihm nichts auf. Er kann ihn tätigen oder nicht, das sieht ihm *frei*. Der Anstoß geht vom Menschen selber aus.

Also ist es etwas prinzipiell Verschiedenes, ob ich wahrnehmend und erkennend aus der Außenwelt Inhalte aufnehme oder ob ich zähle.

Zwei Gebiete werden einander hier gegenübergestellt: Wahrnehmen und Erkennen einerseits und der Zählprozess andererseits.

Wir sagen nichts gegen die Gegenüberstellung von Wahrnehmen und Zählprozess. Vom Erkennen aber, vom begrifflichen Denken, kann man ebenso wie vom Zählprozess sagen: "Das Denken zwingt ihm nichts auf. Er kann es tätigen oder nicht, das steht ihm *frei*. Der Anstoß geht vom Menschen selber aus." Der Zählprozess ist eben ein Glied, ein besonders willensdurchdrungenes Glied des begrifflichen Denkens. Das begriffliche Denken kann die Hauptbegriffe Qualität und Quantität und viele andere erzeugen. Die *Quantität* an sich hat noch keine Grenze. Bekommt sie eine solche, wird sie ein *Quantum*. Das Quantum nur als solches ist begrenzt überhaupt, aber erst als *Zahl* in seinen Bestimmungen vollständig gesetzt. Die Begriffsmomente der Zahl sind Anzahl und Einheit. Durch die Zahl "acht" ergreife ich nicht Kugeln, sondern eine Anzahl Kugeleinheiten. Das Objekt des Zählprozesses ist weder diese noch jene Kugel, auch nicht die Kugel, sondern die acht Kugeln als ein durch eine Zahl zu bestimmendes Quantum. Durch den Zählprozess ergreife ich willentlich begrifflich das Objekt, die Menge der acht Kugeln. Durch die Aussage "acht" habe ich das Objekt, die Menge der acht Kugeln charakterisiert, gegen andere Mengen bestimmt. Das Resultat "acht" kann ich nicht willkürlich zu "sieben" verändern. Ob ich die Kugeln von rechts oder von links zähle, sagt freilich nichts über das Objekt, (die Menge der acht Kugeln) aus. Daraus kann man aber nicht schließen, dass die Zahl

> "mit dem Objekt in keinem Zusammenhang steht, außer wenn ich das Objekt mit dieser Zahl benenne" (Vgl. Saurer S. 12.)"

Dieser Satz hat nur dann seine Geltung, wenn man ihm eine ganz andere Bedeutung gibt: "Die Zahl entsteht *als Zahl* erst im menschlichen Bewusstsein." Dasselbe kann man aber von jedem Begriff sagen.

Saurer sagt ferner, die Zahl sei inhaltslos, vermittle weder augenfällige Qualitäten noch Wesentliches von einem Objekt. Das ist sehr einseitig gesagt. Die Zahl – oder die Quantität überhaupt – ist nicht von dem Qualitativen durch unübersteigliche Abgründe getrennt. Vielmehr fließen sie in der Synthese schön zusammen. Ein Beispiel: Die Temperatur ist eine Qualität, wird aber auch durch eine Zahl erfasst:

3° Wärme, 24° Wärme. Wird die Zahl vergrößert, also quantitativ verändert, ist die entsprechende Temperatur schon qualitativ eine andere. 3° Wärme, 24° Wärme sind Zahlbestimmungen, die zugleich qualitative Bestimmungen sind.

Die einzelnen Zahlen haben an sich nichts mit dem Qualitativen der Temperatur zu tun. Es handelt sich hier nur um Zahlen*veränderung* und Qualitäts*veränderung*.

Ein anderes Beispiel: Die spezifischen Gewichte der Metalle bestimmen wir durch Zahlen. Auch hier haben die Zahlen an sich nichts mit den Qualitäten der Metalle zu tun. Es handelt sich hier nur um Zahlen*verhältnisse*, die den Qualitäts*verhältnissen* entsprechen.

Oder nehmen wir ein anderes Beispiel, wo die Zahl in geometrischer Form erscheint: die fünfblättrige Erdbeerenblume. Ob ich die fünf Blumenblätter von rechts oder von links zähle, sagt freilich nichts über das Objekt aus. Daraus darf man aber nicht schließen, dass die Zahl

> "mit dem Objekt in keinem Zusammenhang steht, außer wenn ich das Objekt mit dieser Zahl benenne", (Vgl. Saurer S. 12.)

Wir meinen keineswegs mit dieser Darstellung das schwierige Problem befriedigend gelöst zu haben. Die Intensität der Problematik bei Saurer und Bühler regt zur Zusammenarbeit an, auch wenn zunächst sachliche Divergenzen da sind. Denn – um die Worte der Verfasser zu gebrauchen –

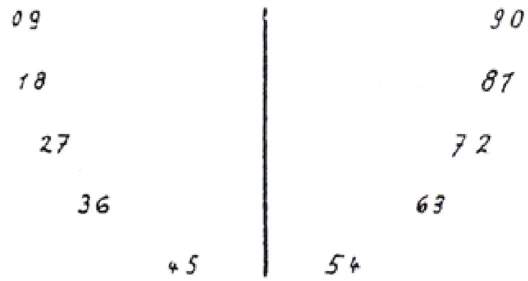
> "sachliche Divergenzen können Ausgangspunkt förderlicher Auseinandersetzungen werden".

Die freie Beweglichkeit im Zahlenreich durch rhythmische Willensbetätigung und geometrisierende Formkraft ist ein unentbehrliches Erziehungselement im Schulunterricht. Sie wird nicht durch einseitige Trainierung des "praktischen" Rechnens erreicht. Die geometrisierende Zahl-Kraft des Kindes muss selbstverständlich ins praktische Leben hineingeführt werden. Sie übt sich aber besonders im Rechnen mit reinen Zahlen. Saurer und Bühler geben uns nun eine Menge Beispiele, wie man ein solches Rechnen dem Kinde gemäß gestalten kann.

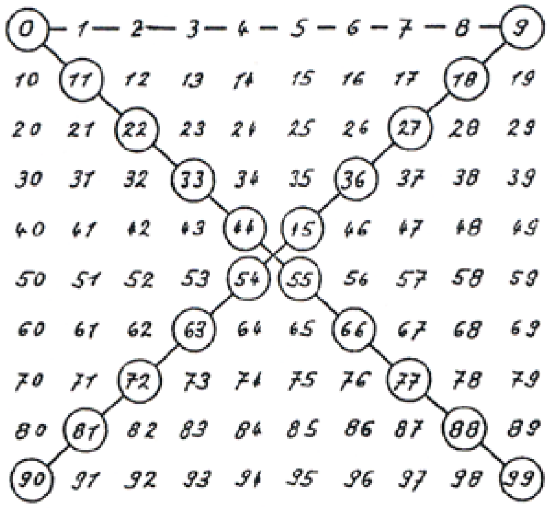
Die Beispiele sind meistens sehr gut. Sie wirken anregend. Man beginnt sofort die Beispiele weiter auszugestalten oder umzugestalten und durch andere zu ergänzen.

Wir erwähnen im Folgenden nur solche Beispiele, wo wir Verbesserungen förderlich gefunden zu haben meinen.

Die Gesetzmäßigkeit der 9er-Reihe (S. 35 unten) ist an sich sehr schön. Doch wird sie viel schöner erscheinen, wenn man sie aus den schon von der ersten Klasse an zu beginnenden geometrisierenden Symmetriezeichnungen usw. hervorwachsen lässt. Ja, wenn man solche Symmetriezeichnungen mit den Schülern geübt hat, kommen die Kinder – jedenfalls die begabten – selbst darauf. Ein neunjähriger Knabe in meiner Klasse entdeckte ganz von selbst diese Spiegelgesetzmäßigkeit der 9er-Reihe. Ich ordnete nur das Bild:

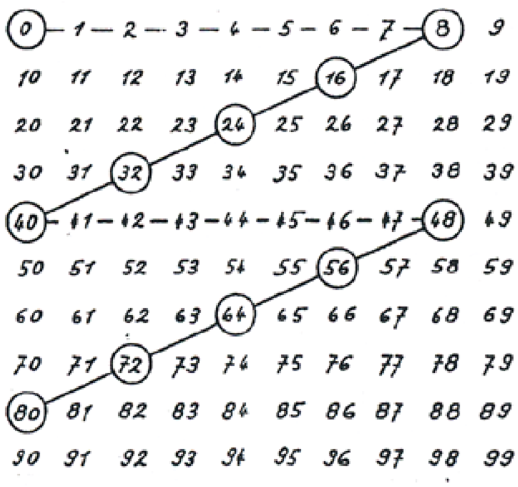


Die Aufstellung der 9er-Reihe (S. 35 oben) scheint zunächst das allein Natürliche zu sein. 10 ist aber ebensoviel Neuanfang wie Abschluss. Man stellt die 10er-Kolonne besser voran:



Die 9er-Reihe verläuft dann *ganz* diagonal (nicht nur "fast" diagonal), und das ist schöner. Zugleich bekommt man die 11er-Reihe in der anderen Diagonale.

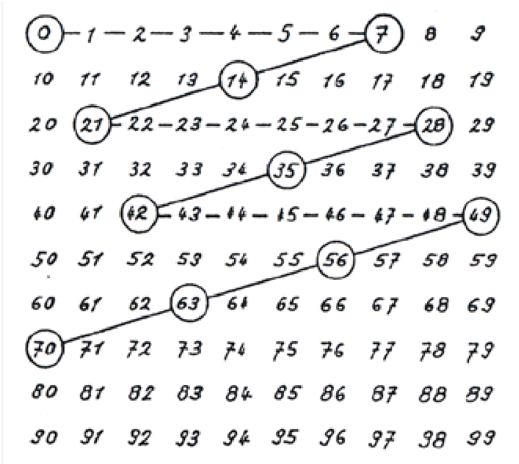
In den anderen Reihen ist es auch besser, dasselbe durchzuführen. Die 8er-Reihe bekommt ihr eigentliches naturgemäßes geometrisches Bild:



Es wird *ganz* regelmäßig: zwei Querlinien mit je 5 parallelen Zahlen - nicht nur scheinbar fast regelmäßig wie sonst. Dasselbe gilt von der 7er-Reihe. Das Bild, S. 38, ist scheinbar unregelmäßig,

"in einer dem Pendelgesetz zuwiderlaufenden Weise" (Bühler).

Das ist aber nur scheinbar. In Wirklichkeit pendelt die Reihe zweimal "zu viel" nach rechts (dem Pendelgesetz zuwiderlaufend), dann aber wiederum zurück nach links, und jetzt "zu viel" nach links. Der Zahlenrhythmus der 7er-Reihe ist somit: 3, 3, 4 – 3,3, 4 –:



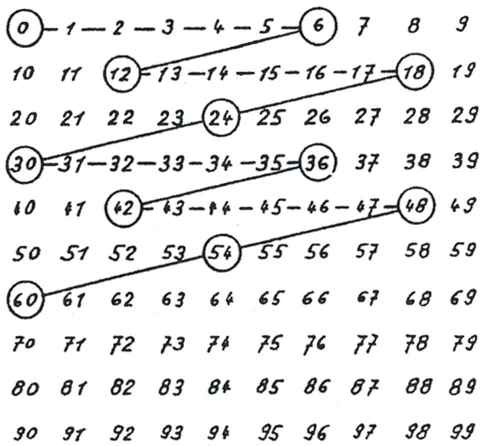
Die Darstellung Bühlers ist somit irreführend. Seine Aussage (S. 38 unten):

"Weiter veranschaulicht die vorliegende Darstellung, dass immer genau in der Mitte des linksseitigen Pendelausschlages ein Glied der 7er-Reihe erscheint, zuerst 14, dann 35 und zuletzt 56"

hat nichts mit der 7er-Reihe zu tun. Hätte er die Darstellung nur weitergeführt: ,,70-77-84-91", wäre er sogleich zu einem linksseitigen Pendelausschlag mit 4 Zahlengliedern gekommen, wo folglich kein Glied "genau in der Mitte" steht. Wie man sich auch mit der Darstellung dreht, ist der objektive Zahlenrhythmus der 7er-Reihe

eben: 3, 3, 4 – 3, 3, 4. Man muss also die bildliche Darstellung aufsuchen, wo dieser Rhythmus am schönsten erscheint.

Genau dasselbe gilt von der 6er-Reihe. Der Zahlenrhythmus der 6er-Reihe ist: 2, 3, 2, 3 – 2, 3, 2, 3. Das sieht man nicht unmittelbar aus dem Bild (S. 39). Wenn man die Reihe weiterführt, kommt schon die wirkliche Gesetzmäßigkeit zum Vorschein. Schöner aber ist das Bild, wo der Rhythmus *unmittelbar* erscheint:



Man kann gegen diese Darstellung nicht einwenden:

"Dann müsste man auch Nr. 20. S. 61 verändern."

Selbstverständlich kann man eine Darstellung hier, eine andere dort gebrauchen. In diesem Falle könnte man aber sehr gut auch Nr. 20 umstellen. Die Aufstellung wird dann noch ein bisschen übersichtlicher. (Die Zahl 100 kann man auslassen oder zuletzt addieren.) Die Summe der ersten Kolonne ist nur durchschaubar als 460=450 + 10. Schreibt man die 10er-Kolonne zuerst, bekommt man als Bild-Anfang die unmittelbar durchschaubare Grundsumme 450, worauf die anderen Kolonnensummen gleichsam bauen. Die Addition a) wird dann ebenso einfach wie vorher. Die Addition b) wird noch einfacher:

(5x400) + (5x500) + 450 = 11x450 = 4950.

Die Gauss'sche Ergänzung liegt dann auch näher, weil die Zahl 100 schon für sich abgetrennt ist.

Die Beispiele Nr. 15 bis Nr. 18 sind nur halb durchgeführt. Der Schüler bekommt hier eine Reihe Divisionsaufgaben, deren Dividenden ihm zunächst ganz willkürlich gewählt erscheinen müssen. In der zweiten Differenzreihe der Dividenden entdeckt er die konstante Zahl 222 (bzw. 22 in Nr. 17), in der ersten Differenzreihe der Quotienten die konstante Zahl 111 (bzw. 11 in Nr. 17). In der scheinbaren Willkür findet er Gesetzmäßigkeiten. Es ist wohl möglich, dass der Schüler dadurch einen Eindruck der Erhabenheit des Lehrers bekommt, der Zahlen mit solchen verborgenen Gesetzmäßigkeiten ersinnen kann. Doch büßt man nichts von Autorität ein, wenn man jetzt die Schüler den Zahlenaufbau lehrt. Man stellt das ganze auf den Kopf. Zuerst kommt die Reihe: 101 (warum nicht auch dieses erste Glied !), 212, 323, ... 989 (wobei der Schüler bewusst die Zahl 111 verwendet). Man multipliziert dann jedes Glied bzw. mit 10, 9, 8. ... 2 und bekommt die Reihe 1010, 1908, 2584 ... 1978. Wohl keine Schüler (die noch nicht das Buchstabenrechnen gelernt haben) werden jetzt *genau* durchschauen *wie* die Zahl 111 in dieser Reihe drinnen ist. Aber jeder Schüler wird es fühlen, dass diese Zahl in der Reihe irgendwie vorhanden sein muss. Er hat ja selbst die Zahl in die Reihe hineingelegt. Dann erscheint sie verdoppelt in der zweiten Differenzreihe! - Nr. 16, 17, 18 in derselben Weise.

Nr. 33 kann man leicht vicl bunter gestalten. Man führt die Reihe bis zum 18. Glied, zieht dieses zusammen, gestaltet es um, lässt die Zahlenphantasie ein bisschen spielen, und bekommt:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 8 7 6 5 4 3 2 1 x [1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1] =
999 999 999 999 999 999 ÷ 999 999 999 ÷ 999 999 999

Man kann die Ableitung vor oder nach der Aufstellung des Resultats durchführen. Man bekommt dann zwei verschiedenartige Aufgaben, die freilich nur in den obersten Klassen der Volksschule mit zweckmäßigem Erfolg durchzuführen möglich sein dürften.

Die Aufstellung Nr. 37 ist nicht zu empfehlen. Das Gleichheitszeichen darf man nicht verwenden, wo keine Gleichheit vorhanden ist. 1089, 2178 usw. müssen zweimal geschrieben werden.

Die Zahlengesetzmäßigkeit Nr. 36 ist schön aber doch nicht richtig beschrieben:

"Gesetzmäßigkeit des Zahlenbildes sowohl in den Kolonnen als auch in deren Summen" (S. 68 unten).

Das gilt eben nicht von der ersten Kolonnensumme. Die Gesetzmäßigkeit beruht nämlich nicht auf der Zahl 13, auch nicht auf der Zahl 7, sondern restlos auf deren Produkt 91 und zwar in Verbindung mit der Zahl 55 (= 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) und mit den Zahlen 11, 111, 1111 usw.

Nachdem die Schüler alles gerechnet und aufgestellt haben, finden sie die Gesetzmäßigkeit des Zahlenbildes sowohl in den Kolonnen als auch in deren Summen, außer der ersten Kolonne. Sie schreiben daher dann das ganze noch einmal auf *ohne* die erste Kolonne, und müssen demgemäß die Zahlen 7, 77, 777, 7777 usw. durch 1, 11, 111, 1111 usw. ersetzen. In dieser Weise erleben die Schüler das Nicht-hierher-Gehörige der Zahlen 7 und I 3. Sie erleben wie die Zahl 91 das Primäre ist, wie die eventuelle Faktorenzerlegung in diesem Fall belanglos ist und die eigentliche Gesetzmäßigkeit nur verschleiert. Dann durchschauen die Schüler auch viel leichter die Gesetzmäßigkeit und können die Summe der nächsten, noch nicht aufgeschriebenen Kolonne ohne Rechnen (außer 6+ 5=11 und 5+1 =6) mit einem Blick Vorauswissen (= 556110555).

In Nr. 40 ist das Umgekehrte der Fall. Hier haben wir eine Zahl 3367, die eigentlich die Gesetzmäßigkeit verschleiert und deren *Faktoren* erst diese zum rechten Vorschein bringen. Nachdem die Schüler mit

Erstaunen das Geheimnis in verschleierter Weise erlebt haben, muss man ihnen den Schleier lüften – wenn sie es nicht selbst tun.

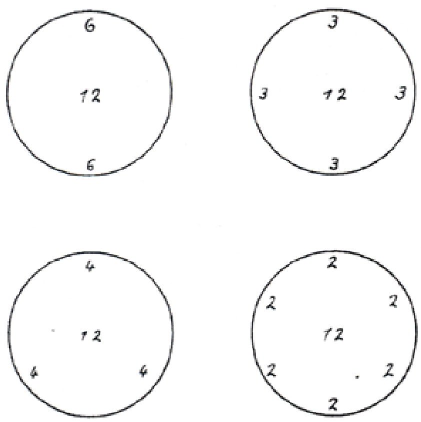
33x3367 = (3x11) x (37x91).
91x11 = 1001 kennen die Schüler von Nr. 36.
3x37 = 111 kennen die Schüler von Nr. 39.

Wir vertauschen deshalb die Faktoren:

33x3367 = (3x37) x (91x11) = 111x1001 = 111 111.

Wenn man den Schleier nicht lüftet, wird Nr. 40 nicht viel mehr als ein schönes Taschenspielerstück, wo man nicht sehen kann, was eigentlich geschieht.

Zuletzt wollen wir besonders einen Fall erwähnen, wo wir das Rechnen mit reinen Zahlen, wie es Saurer und Bühler gestalten, in fruchtbarer Weise ausdehnen, fortbilden und in schöner Art ergänzen können. Es ist die geometrisierende Tätigkeit des Kindes, die die Schönheit der Zahlenformationen in besonderem Maße erscheinen lässt. Der Fall ist die Faktorenzerlegung (S. 40). - Wir zeichnen zuerst alle regulären Polygonen bis zum 10- und dann noch das Zwölfeck. Wir befinden uns in der 3. Volksschulklasse und haben natürlich nicht das eigentliche Konstruieren gelernt. Doch dürfen wir jetzt Lineal und Malkrug (als Zirkel) verwenden. Wir begnügen uns nicht mit den Vielecken in den Zirkeln, sondern zeichnen auch die verschiedenen Sterne darin, 5-Stern, 6-Stern usw. In den Sternen können wir wiederum Sterne zeichnen, und das Ganze in mannigfaltigster Weise färben. Nachdem wir eine Zeit in diesen reinen Formen gelebt haben, kommen die reinen Zahlen dazu. Eine Zahl, z.B. 12, setzen wir in die Mitte des Zirkels. Dann zerlegen wir die Zahl unseren Sternen gemäß.



Alle Lehrer der Volksschule werden natürlich das Buch von Saurer und Bühler lesen müssen. Es ist aber vor allem notwendig, dass man sich nicht nur kritisch von einer solchen Bestrebung abwendet, oder sie bloß lobt. Wir müssen tätig weiterbildend zugreifen.

Erstveröffentlichung:

Die Menschenschule, Zürich, 1944/2